Bernardo Aceituno Cabezas

12-10764

Problema de semana 5

1. Considere la señal no periódica

$$x(t) = \begin{cases} 1\, para\, -2 < t < -1 \\ -1\, para\, 1 < t < 2 \end{cases}$$

Y su extensión periódica:

$$x_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - 6k)$$

a. Calcule, usando las definiciones de transformada y serie, la transformada de Fourier (**TF**) de x(t), la serie de Fourier de x1(t) y, usando las propiedades de la transformada de Fourier de una señal periódica, calcule la TF de x1(t)

b. ¿cuál es la relación entre las 3?

c. cuál es la TF de $\frac{dx(t)}{dt}$ y $\frac{dx_1(t)}{dt}$?

a) Para la transformada de x(t) usamos la definición:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-2}^{-1} e^{-j\omega t}dt - \int_{1}^{2} e^{-j\omega t}dt$$

Integramos:

$$X(\omega) = \left[\frac{e^{-j\omega t}}{j\omega}\right|\begin{matrix}-2\\-1\end{matrix} - \left[\frac{e^{-j\omega t}}{j\omega}\right|\begin{matrix}1\\2\end{matrix} = \frac{e^{j2\omega} - e^{j\omega}}{j\omega} - \frac{e^{-j\omega} - e^{-j2\omega}}{j\omega}$$

Y si simplificamos

$$\boxed{X(\omega) = 2\frac{\cos(2\omega) - \cos(\omega)}{j\omega}}$$

Luego para la serie de Fourier de x1(t) podemos recordar que para una función x(t) que se repite con periodo T, sus coeficientes de Fourier estarán dados por:

$$a_k = \frac{1}{T}X(\frac{2\pi k}{T})$$

Como x1(t) se repite con periodo T = 6, tendremos

$$a_k = \frac{2}{6}\left[\frac{\cos(2\frac{2\pi k}{6}) - \cos(\frac{2\pi k}{6})}{j\frac{2\pi k}{6}}\right]$$

Operando

$$a_k = \left[\frac{\cos(\frac{2\pi k}{3}) - \cos(\frac{\pi k}{3})}{j\pi k}\right]$$

Luego vemos que la k se encuentra en el denominador, por ello es mejor calcular el término a_0 por separado:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T \; x_1(t)dt \text{ (Promedio de la función en un periodo)}$$

Como la función tiene áreas igual pero de signos contrarios en un periodo, está se cancelan y por ello:

$$a_0 = 0$$

Finalmente:

$$\boxed{x_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\frac{2\pi k}{3}) - \cos(\frac{\pi k}{3})}{j\pi k} e^{j\frac{\pi}{3}t} \;, k \neq 0}$$

Luego, sabemos que para una señal periódica con coeficientes de Fourier a_k tendrá una transformada de Fourier

$$TF\{f(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - \frac{2\pi k}{T})$$

Luego tendremos para x1(t):

$$\boxed{X_1(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\frac{\cos\left(\frac{2\pi k}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi k}{3}\right)}{jk} \delta\left(\omega - \frac{\pi k}{3}\right) \;, k \neq 0}$$

b) La relación se encuentra en la forma en que los coeficientes de la serie de Fourier están dados por la transformada de Fourier evaluada en los múltiplos de la frecuencia fundamental de la función mientras que podemos notar que la transformada de la serie será una distribución discreta de la transformada original multiplicada por un factor de pi.

c) Sabemos por propiedades de la transformada de Fourier que:

$$TF\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = j\omega TF\{f(t)\}$$

Aplicando esto obtenemos para la derivada de x(t)

$$TF\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = j\omega X(\omega) = \boxed{2[\cos(2\omega) - \cos(\omega)]}$$

Y para la derivada de x1(t)

$$TF\left\{\frac{dx_1(t)}{dt}\right\} = j\omega X_1(\omega) = \boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\omega\frac{\cos\left(\frac{2\pi k}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi k}{3}\right)}{k} \delta\left(\omega - \frac{\pi k}{3}\right) \;, k \neq 0}$$

2. Usando sus propiedades, calcule la TF de

$$x(t) \;=\; t\left(\frac{sin(t)}{(\pi t)}\right)^2$$

Recuerde que $TF\left\{\frac{sin(Wt)}{(\pi t)}\right\} = \begin{cases} 1\,, & -W < \omega < W \\ 0\,, & para\ todo\ lo\ demas \end{cases}$

Tenemos que por propiedades

$$TF\{x(t)y(t)\} = \frac{1}{2\pi}X(\omega) * Y(\omega)$$

Y que

$$TF\{tx(t)\} = \frac{dX(\omega)}{dt}$$

Luego tenemos que si aplicamos esto al problema presentado se cumple que:

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\frac{d[S(\omega) * S(\omega)]}{dt}$$

Dónde:

$$S(\omega) = \begin{cases} 1\,, & -1 < \omega < 1 \\ 0\,, & para\ todo\ lo\ demas \end{cases}$$

Luego si convolucionamos

$$S(\omega) * S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau)S(\omega - \tau)d\tau$$

Si vemos para cada caso

$\underline{\omega < -2\ y\ \omega \geq 2}$

Aquí las señales no se interceptan luego

$$S(\omega) * S(\omega) = 0$$

$\underline{-2 \leq \omega < 0}$

En este caso

$$S(\omega) * S(\omega) = \int_{-1}^{\omega+1} d\tau \;=\; \omega + 2$$

$\underline{0 \leq \omega < 2}$

$$S(\omega) * S(\omega) = \int_{\omega-1}^{1} d\tau \;=\; 2 - \omega$$

Vemos que es un pulso triangular!

Entonces:

$$S(\omega) * S(\omega) = r(\omega + 2) - 2r(\omega) + r(\omega - 2)$$

Si derivamos entonces se concluye:

$$\boxed{X(\omega) = \frac{1}{2\pi}[u(\omega + 2) - 2u(\omega) + u(\omega - 2)]}$$

3. **calcule x(t)** si

$$X(\omega) = \delta(\omega) + \delta(\omega-\pi) + \delta(\omega-5)$$

¿Es x(t) periódica?

Tenemos que la transformada inversa de Fourier está dada por:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\tau$$

Si evaluamos:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\omega) + \delta(\omega-\pi) + \delta(\omega-5)]e^{j\omega t}d\tau$$

Integrando:

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi}[1 + e^{j\pi t} + e^{j5t}]}$$

Notemos que está función no es periódica debido a que es imposible que el termino $e^{j\pi t}$complete un numero de periodos al mismo tiempo que e^{j5t}complete otro, pues no existe una relación racional entre 5 y π.

4. Si

$$H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega+3)} \text{ y } y(t) = e^{-3t}u(t) - e^{-4t}u(t)$$

Calcule x(t). Recuerde que h(t) es la respuesta al impulso del sistema, H(jw) su TF y y(t) es la respuesta del sistema a x(t)

Ya que es un par de entrada y salida de un sistema:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Si lo pasamos al dominio de la frecuencia

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

De allí si transformamos y(t) al dominio de la frecuencia:

$$Y(\omega) = TF\{e^{-3t}u(t) - e^{-4t}u(t)\}$$

Sabemos por tabla que:

$$TF\{e^{-at}u(t)\}= \frac{1}{(j\omega+a)}$$

Luego tenemos por linealidad:

$$Y(\omega) = \frac{1}{(j\omega+3)} - \frac{1}{(j\omega+4)} = \frac{1}{(j\omega+3)(j\omega+4)}$$

Luego:

$$X(\omega) = \frac{Y(\omega)}{H(\omega)} = \frac{1}{(j\omega+4)}$$

Aplicando transformada inversa:

$\boxed{x(t) = e^{-4t}u(t)}$

5. Tengamos un sistema LTI con relación entrada salida es:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 10y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)z(t-\tau)d\tau - x(t)$$

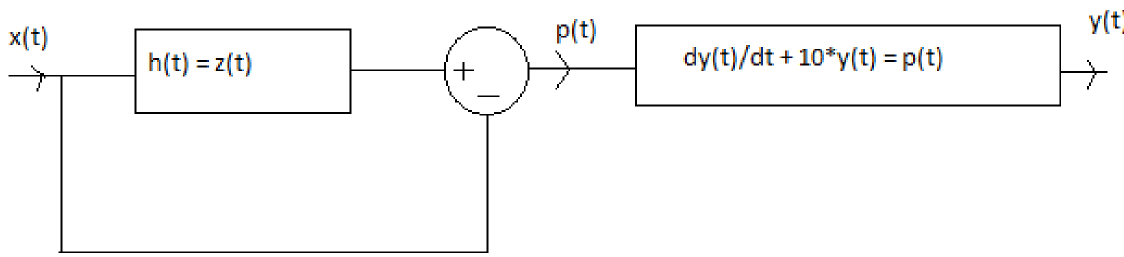
donde $z(t) = e^{-t}u(t) + 3\delta(t)$

a. ¿Puede hacer un diagrama de bloques de este sistema?
b. ¿Cuál es la respuesta en frecuencia del sistema H(jw) = Y(jw)/X(jw)
c. Calcule la respuesta el impulso

a. Si se puede hacer, pero para ello debemos revisar la ecuación diferencial que describe al sistema, esta se puede reescribir como:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 10y(t) = x(t) * z(t) - x(t)$$

Si llamamos $x(t) * z(t) - x(t) = p(t)$ vemos que p(t) es la salida de una conexión en paralelo entre un sistema de repuesta al impulso z(t) y una resta de la entrada, luego el diagrama será:



b. Para calcular esto hay que pasar el sistema al dominio de la frecuencia para ver cómo se comporta y descomponerlo en sistemas más sencillos:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 10y(t) = x(t) * z(t) - x(t)$$

Luego:

$$Y(\omega)[j\omega + 10] = X(\omega)[Z(\omega) - 1]$$

De allí por tablas

$$Z(\omega) = \frac{1}{(j\omega + 1)} + 3 = \frac{3j\omega + 4}{j\omega + 1}$$

Luego:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{j\omega + 10}\left[\frac{3j\omega + 4}{j\omega + 1} - 1\right] = \boxed{\frac{2j\omega + 3}{(j\omega + 1)(j\omega + 10)}}$$

c. La respuesta al impulso será la transformada inversa de la respuesta en frecuencia, para ello descomponemos en fracciones simples para aplicar transformadas inversas de tabla:

$$\frac{2j\omega + 3}{(j\omega + 1)(j\omega + 10)} = \frac{A}{j\omega + 1} + \frac{B}{j\omega + 10}$$

De allí tenemos el sistema:

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ 10A + B = 3 \end{cases}$$

Despejamos:

$$A = \frac{1}{9} \; y \; B = \frac{17}{9}$$

De allí:

$$H(\omega) = \frac{\frac{1}{9}}{j\omega + 1} + \frac{\frac{17}{9}}{j\omega + 10}$$

Finalmente si aplicamos transformada inversa:

$$\boxed{h(t) = \frac{e^{-t}u(t) + 17\, e^{-10t}u(t)}{9}}$$